**Задача 4. Моделирование гауссовского процесса с данной автоковариационной функцией**

1. На отрезке с шагом смоделируйте траекторий гауссовского процесса с заданным математическим ожиданием и заданной автоковариационной функцией . Выведите на печать две-три траектории вместе с графиком .
2. Выберите несколько пар сечений построенного процесса (для далеких значений и , для близких, для соседних). Постройте для выбранных пар сечений диаграммы рассеяния, вычислите выборочные коэффициенты корреляции, постройте 95% доверительные интервалы (см. материал прошлого семестра). Сравните выборочные и теоретические значения коэффициентов корреляции. Для выбранных сечений постройте гистограммы относительных частот, совмещенные с теоретической плотностью распределения СВ .

Сформулируйте общие выводы.

Исходные данные:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Интервал | Шаг | Число  траекторий | Математическое ожидание | Автоковариационная функция |
|  | 0.05 | 100 |  |  |

**Решение:**

1. Смоделируем траекторий гауссовского процесса с заданным математическим ожиданием и заданной автоковариационной функцией .

* Алгоритм моделирования траектории гауссовского процесса

Найдем размерность моделируемой траектории :

где – обозначение целой части числа.

Вычислим вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу :

def \_m(t):

  return (1 + math.exp(-t / 2))

def K(tau):

  return (3 / (3 + 20 \* tau\*\*2))

for i in range(k+1):

  m[i] = \_m(i \* h)

for i in range(k+1):

  for j in range(k+1):

    sigma[i][j] = K(math.fabs(i - j) \* h)

Выведем срез вектора и ковариационной матрицы :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 | 0.7059 | 0.6249 | 0.5505 | 0.4839 | 0.4255 |
| 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 | 0.7059 | 0.6249 | 0.5505 | 0.4839 |
| 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 | 0.7059 | 0.6249 | 0.5505 |
| 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 | 0.7059 | 0.6249 |
| 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 | 0.7059 |
| 0.7059 | 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 | 0.7895 |
| 0.6249 | 0.7059 | 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 | 0.8696 |
| 0.5505 | 0.6249 | 0.7059 | 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 | 0.9375 |
| 0.4839 | 0.5505 | 0.6249 | 0.7059 | 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 | 0.9836 |
| 0.4255 | 0.4839 | 0.5505 | 0.6249 | 0.7059 | 0.7895 | 0.8696 | 0.9375 | 0.9836 | 1.0 |

Для моделирования траектории гауссовского процесса необходимо применить разложение Холецкого к ковариационной матрице для получения нижнетреугольной матрицы :

L = np.linalg.cholesky(sigma)

Выведем срез матрицы :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.9836 | 0.1803 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.9375 | 0.3409 | 0.0698 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.8696 | 0.4558 | 0.1863 | 0.0374 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.7895 | 0.5159 | 0.3078 | 0.1233 | 0.0252 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.7059 | 0.5277 | 0.3995 | 0.2329 | 0.0949 | 0.0192 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.6249 | 0.5053 | 0.4477 | 0.3296 | 0.1959 | 0.0792 | 0.0161 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.5505 | 0.4634 | 0.4561 | 0.3902 | 0.2944 | 0.1734 | 0.0706 | 0.0143 | 0.0 | 0.0 |
| 0.4839 | 0.4132 | 0.4367 | 0.4114 | 0.3629 | 0.2706 | 0.1607 | 0.0652 | 0.0133 | 0.0 |
| 0.4255 | 0.3622 | 0.4017 | 0.4018 | 0.3933 | 0.3418 | 0.2575 | 0.1522 | 0.0619 | 0.0126 |

Посчитаем невязку полученного разложения:

По теореме о конечномерных распределениях гауссовского процесса для центрированной последовательности получим:

Следовательно, матрица будет ковариационной для центрированной последовательности :

где ,

**–** последовательность из независимой стандартной гауссовской случайной величины.

Для завершения моделирования траектории гауссовского процесса остается добавить нужное математическое ожидание:

ksi\_mtx = [[0] \* (k+1) for i in range(n)]

epsilon = [0 for i in range(k+1)]

ksi = np.zeros(k+1)

for i in range(n):

  for j in range(k+1):

    epsilon = np.random.normal(0, 1, k+1)

    eta = np.dot(L, epsilon)

    ksi = eta + m

    ksi\_mtx[i] = ksi

* Визуализация траекторий

Смоделируем траекторий согласно вышеизложенному алгоритму и представим их в виде матрицы , т.е. траектории хранятся в виде строк матрицы. Выведем 3 из них на печать (Рисунок 1).

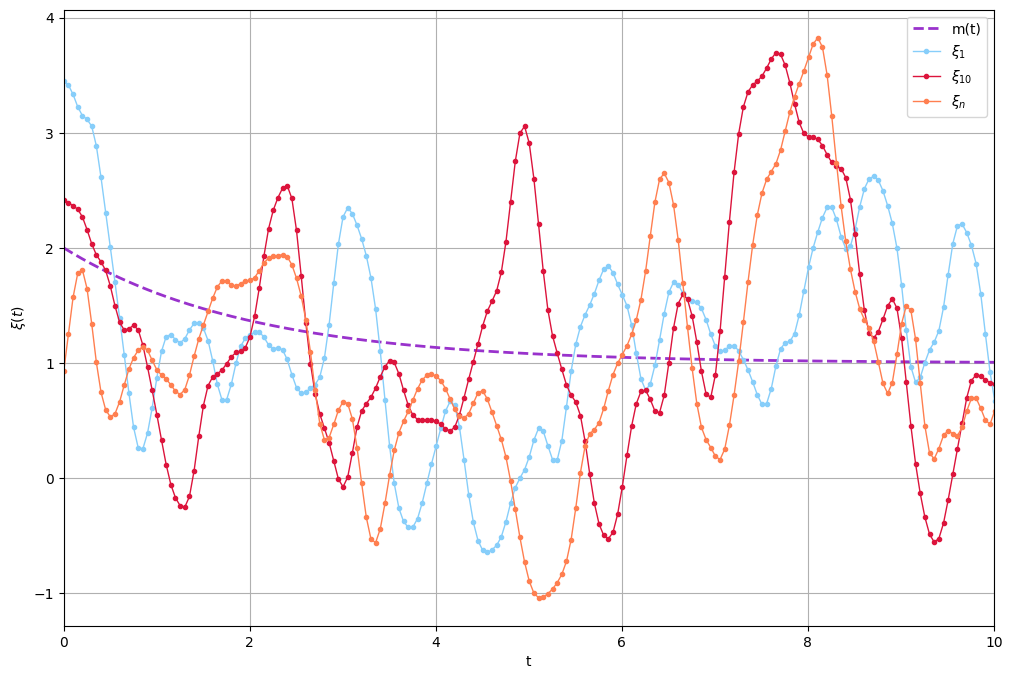


Рисунок 1 – Визуализация 1, 10, 100 смоделированных траекторий гауссовского процесса и теоретического математического ожидания

1. Выберем несколько пар сечений построенного процесса. Построим для выбранных пар сечений диаграммы рассеяния, вычислим выборочные коэффициенты корреляции, построим 95% доверительные интервалы

* Проверка качества моделирования траекторий

-ым сечением процесса будем называть последовательность размерности , состоящую из -ых элементов каждой траектории, т.е.:

for i in range(n):

  s\_n[i] = ksi\_mtx[i][n-1]

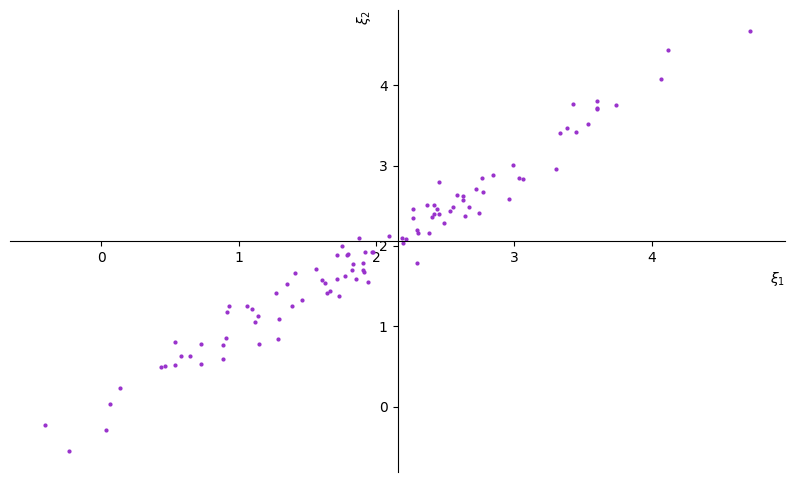
  s\_1[i] = ksi\_mtx[i][0]

  s\_2[i] = ksi\_mtx[i][1]

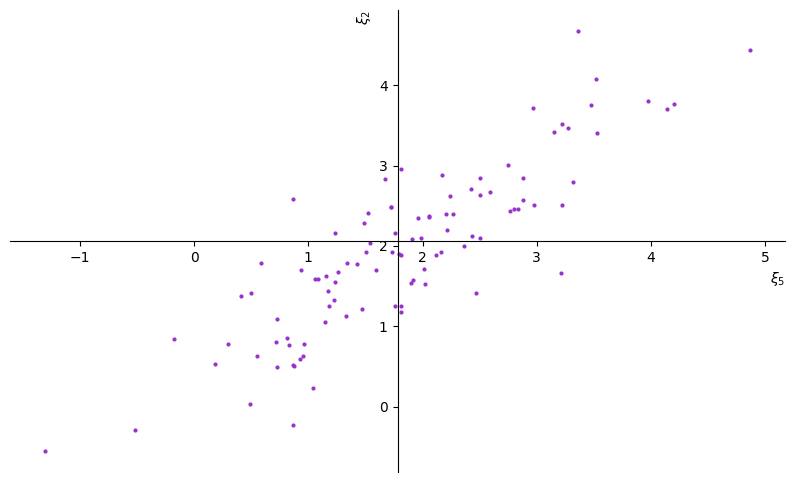
  s\_5[i] = ksi\_mtx[i][4]

  s\_10[i] = ksi\_mtx[i][9]

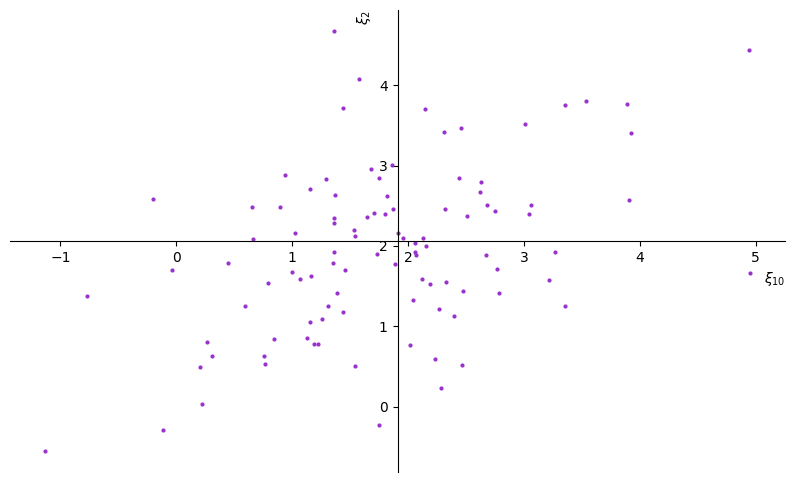
Выберем несколько пар сечений построенного процесса, например, , , , и построим для них диаграмму рассеяния (Рисунок 2).



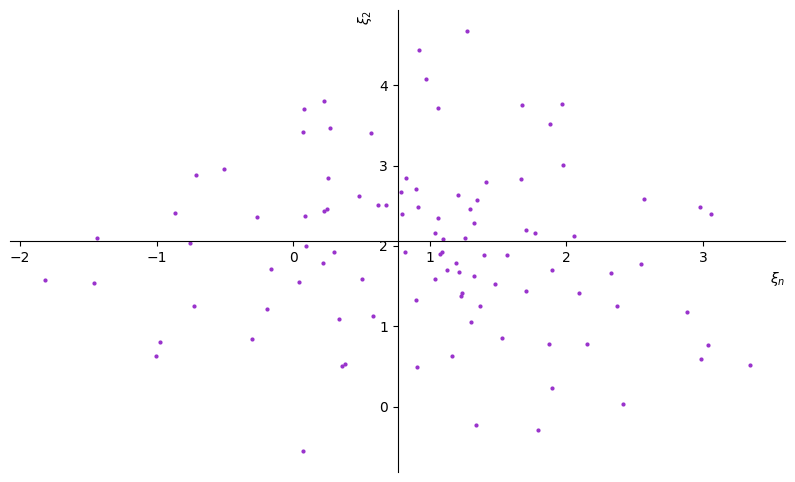
А)



Б)



В)



Г)

Рисунок 2 – Диаграммы рассеяния для сечений: А) 1, 2; Б) 5, 2; В) 10, 2;

Г) 100, 2.

Видно, что для близких сечений диаграмма рассеяния менее разбросана по плоскости, что подтверждается ковариационной матрицей.

Вычислим теоретические и выборочные коэффициенты корреляции для построенных сечений процесса по формулам:

Теоретические коэффициенты корреляции:

r\_1\_2 = sigma[1][2] / (sigma[1][1] \* sigma[2][2])\*\*(1/2)

r\_5\_2 = sigma[5][2] / (sigma[5][5] \* sigma[2][2])\*\*(1/2)

r\_10\_2 = sigma[10][2] / (sigma[10][10] \* sigma[2][2])\*\*(1/2)

r\_n\_2 = sigma[n-1][2] / (sigma[n-1][n-1] \* sigma[2][2])\*\*(1/2)

Выборочные коэффициенты корреляции:

np.corrcoef(s\_1, s\_2)[0,1], np.corrcoef(s\_5, s\_2)[0,1], np.corrcoef(s\_10, s\_2)[0,1], np.corrcoef(s\_n, s\_2)[0,1]

Таблица 1 − Теоретические и выборочные коэффициенты корреляции для пар сечений (1, 2); (5, 2); (10, 2); (100, 2)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Корреляция |  |  |  |  |
|  | 0.98361 | 0.86957 | 0.48387 | 0.00634 |
|  | 0.98403 | 0.86181 | 0.44013 | -0.09544 |

* Построим 95% доверительные интервалы на основе выборочных коэффициентов корреляции по формулам (известным из курса математической статистики):

def left\_i\_j(sample\_coef):

  alpha = 0.05

  return math.tanh(math.atanh(sample\_coef) - scipy.stats.norm(0, 1).ppf(1 - alpha/2) / (n - 3)\*\*(1/2) - sample\_coef / (2 \* (n -1)))

def right\_i\_j(sample\_coef):

  alpha = 0.05

  return math.tanh(math.atanh(sample\_coef) + scipy.stats.norm(0, 1).ppf(1 - alpha/2) / (n - 3)\*\*(1/2) - sample\_coef / (2 \* (n -1)))

left\_1\_2 = left\_i\_j(np.corrcoef(s\_1, s\_2)[0,1])

left\_5\_2 = left\_i\_j(np.corrcoef(s\_5, s\_2)[0,1])

left\_10\_2 = left\_i\_j(np.corrcoef(s\_10, s\_2)[0,1])

left\_n\_2 = left\_i\_j(np.corrcoef(s\_n, s\_2)[0,1])

right\_1\_2 = right\_i\_j(np.corrcoef(s\_1, s\_2)[0,1])

right\_5\_2 = right\_i\_j(np.corrcoef(s\_5, s\_2)[0,1])

right\_10\_2 = right\_i\_j(np.corrcoef(s\_10, s\_2)[0,1])

right\_n\_2 = right\_i\_j(np.corrcoef(s\_n, s\_2)[0,1])

Приведем значения 95% доверительных интервалов для рассматриваемых пар сечений.

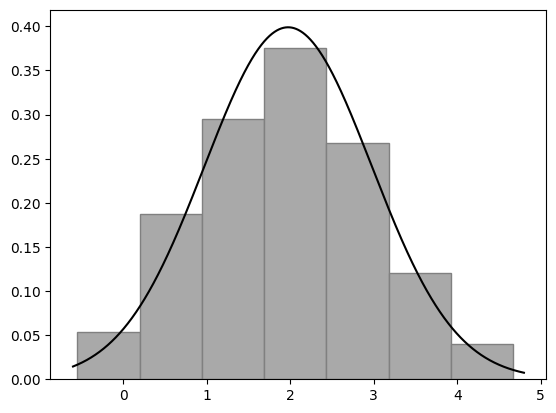
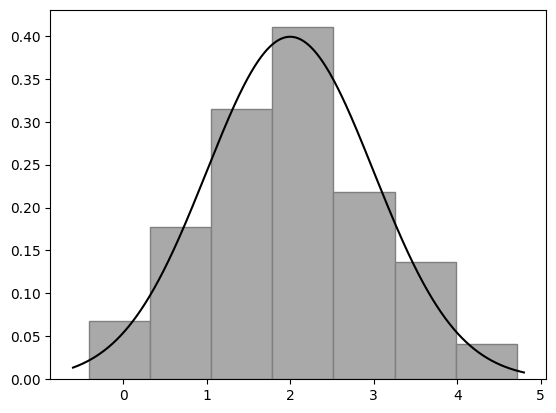
Таблица 2 − Теоретические коэффициенты корреляции и 95% доверительный интервал для пар сечений (1, 2); (5, 2); (10, 2); (100, 2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0.97607 | 0.98361 | 0.98914 |
|  | 0.79941 | 0.86957 | 0.90424 |
|  | 0.26471 | 0.48387 | 0.58444 |
|  | -0.28604 | 0.00634 | 0.10339 |

Согласно данной таблице можем заметить, что теоретические коэффициенты корреляции удовлетворяют полученным 95% доверительным интервалам. Следовательно, можно сделать вывод о том, что нам удалось с достаточно хорошей точность смоделировать гауссовский процесс.

* Проверка элементов сечений на принадлежность нормальному закону распределения

Проверим, что сечения рассматриваемых траекторий действительно распределены согласно нормальному закону распределения, т.е. мы проверим, что . Для этого построим гистограмму относительных частот (согласно алгоритму, описанному в задаче №5 курса «Теория вероятности и математическая статистика») -ого сечения и наложим ее на функцию плотности нормального распределения с характеристиками и . Визуализируем эти графики для сечений :



|  |  |
| --- | --- |
| A) | Б) |

|  |
| --- |
|  |
| В)    Г)    Д) |

Рисунок 3 – Совмещенные графики гистограммы относительных частот N-ого сечения и плотности нормального распределения с параметрами и для: А) ; Б) ; В) ; Г) ; Д) .

Также посчитаем выборочные характеристики рассматриваемых сечений и сравним их с теоретическими.

Таблица 3 − Выборочные характеристики -ого сечения гауссовского процесса и соответствующие этому сечению теоретические значения математического ожидания и среднего квадратичного отклонения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 1.98929 | 2 | 1.00765 | 1 |
|  | 1.95193 | 1.97531 | 1.01816 | 1 |
|  | 1.83767 | 1.90484 | 1.02979 | 1 |
| 10 | 1.79274 | 1.79852 | 1.03519 | 1 |
| 100 | 0.97878 | 1.08416 | 1.02462 | 1 |

Таким образом, элементы сечений гауссовского процесса распределены нормально с математическим ожиданием и дисперсией .

**Выводы:**

Мы научились моделировать и визуализировать траектории гауссовского процесса с заданным математическим ожиданием и заданной автоковариационной функцией (Рисунок 1), а также определять сечения процесса и строить для них диаграммы рассеяния (Рисунок 2). Также мы научились вычислять выборочные и теоретические коэффициенты корреляции (Таблица 1) и по ним строить 95% доверительные интервалы для проверки качества моделирования процесса (Таблица 2). Кроме того, была произведена проверка элементов сечений рассматриваемых траекторий на принадлежность нормальному закону распределения (Таблица 3 и Рисунок 3). Было получено, что с помощью алгоритма с использованием разложения автоковариационной матрицы методом Холецкого можно с достаточно высокой точностью смоделировать гауссовский процесс с заданным математическим ожиданием и заданной ковариационной функцией.